

DNS

Sujet

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques	1
I. Modèle de conducteur métallique – Conducteur parfait	1
A. Effet de peau	1
B. Modèle de conducteur parfait	3
II. Structure de l'onde électromagnétique à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire.....	3

Étude d'un guide d'ondes électromagnétiques

Le guidage des ondes électromagnétiques s'impose chaque fois qu'il est nécessaire de canaliser l'information reçue par le récepteur vers un système utilisateur distant (exemple : antenne réceptrice – câble – poste de télévision).

Données utiles et notations

- Célérité de la lumière dans le vide : $c_0 \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$;
- Conductivité électrique du cuivre : $\sigma \approx 5,9 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1} . \text{m}^{-1}$;
- Dimensions du guide d'ondes : $a = (22,86 \pm 0,05) \text{ mm}$, $b = (10,16 \pm 0,05) \text{ mm}$;
- Fréquence de travail du guide d'ondes : $\nu \approx 9,67 \text{ GHz}$;

I. Modèle de conducteur métallique – Conducteur parfait

Dans cette partie on se propose de préciser la notion de conducteur parfait. Pour cela on part d'un modèle plus réaliste de conducteur métallique pour lequel :

1. les équations de MAXWELL dans le conducteur font intervenir $\rho(M, t)$ la densité volumique de charge et $\vec{j}(M, t)$ le vecteur courant volumique.
2. Le conducteur obéit à la loi d'OHM $\vec{j}(M, t) = \sigma \vec{E}(M, t)$, σ désignant la conductivité électrique du conducteur supposée uniforme et constante;
3. la densité volumique de charge est identiquement nulle en tout point du conducteur et à tout instant $\rho(M, t) = 0$.

A. Effet de peau

1. Dans le cas des champs harmoniques, comparer les deux termes $\mu_0 \vec{j}$ et $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ du second membre de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE et montrer que, à la fréquence de travail du guide d'ondes considéré($\nu=9,67\text{GHz}$), l'un de ces deux termes est négligeable devant l'autre.
2. En déduire une forme simplifiée de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

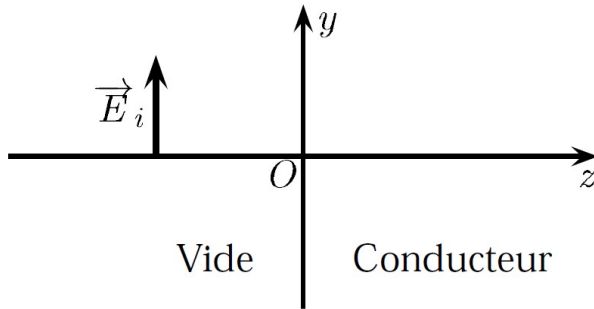


Figure 1

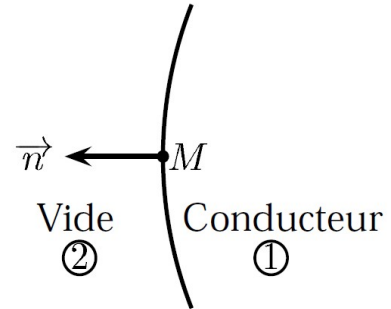


Figure 2

Pour étudier la possibilité d'existence d'une onde électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur métallique réel, on suppose qu'un tel conducteur (*Figure 1*) occupe le demi-espace $z \geq 0$ de sorte que sa surface plane coïncide avec le plan (xOy) . Une onde électromagnétique incidente se propage dans le vide ($z < 0$) dans le sens des z croissants et arrive au niveau de la surface plane du conducteur. Elle donne alors naissance à une onde réfléchie dans le vide et une onde transmise dans le conducteur que l'on cherche à caractériser. L'onde incidente est décrite par son champ électrique : $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_y$. On cherche le champ électrique de l'onde électromagnétique transmise à l'intérieur du conducteur sous forme harmonique, soit en représentation complexe $\vec{E}_t(M, t) = \vec{E}_t(M) \exp i(\omega' t)$.

3. Par un raisonnement physique qualitatif justifier que $\omega' = \omega$.
4. En exploitant les symétries du système, montrer que l'on peut écrire $\vec{E}_t(M) = \underline{E}_t(z) \vec{u}_y$.
5. Établir l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire le champ électrique $\vec{E}_t(M)$ de l'onde transmise.
6. En déduire que $\underline{E}_t(z)$ est solution d'une équation différentielle (1) du type $\frac{d^2 \underline{E}_t}{dz^2} + \underline{k}_t^2 \underline{E}_t = 0$ et donner l'expression de \underline{k}_t^2 en fonction de μ_0 , σ et ω .
7. En passant à la notation exponentielle pour le complexe \underline{k}_t^2 , déterminer les deux solutions a priori possibles pour \underline{k}_t et déduire du comportement à l'infini que la solution physique à garder ici est $\underline{k}_t = \frac{1-i}{\delta}$ et donner l'expression de δ .
8. En déduire la solution de l'équation (1) en prenant $\underline{E}_t(0) = E_{t,0} \exp(-i\varphi)$ avec $E_{t,0}$ constante positive.
9. Représenter graphiquement le module de $\underline{E}_t(z)$ en fonction de z et donner une interprétation physique de δ , appelée épaisseur de peau, après en avoir déterminé la dimension.

10. Application numérique: Calculer δ pour le cuivre fréquence de travail $\nu \approx 9,67 \text{ GHz}$ et commenter la valeur trouvée.

11. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_i(M, t)$ transmis à l'intérieur du conducteur.

B. Modèle de conducteur parfait.

L'approximation de conducteur parfait est suggérée par le calcul numérique effectuée pour δ . Elle consiste à prendre $\delta = 0$, soit formellement $\sigma \rightarrow \infty$.

12. Dans quel domaine de fréquences est-il plus réaliste de considérer qu'un métal réel se comporte comme un conducteur parfait ?

13. Donner les valeurs du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ à l'intérieur d'un conducteur parfait. Justifier.

14. Que valent la densité volumique de charge ρ et le vecteur courant volumique \vec{j} dans un conducteur parfait ?

15. Comment seront alors distribués dans un conducteur parfait un éventuel excès de charges ou un courant ?

On considère une interface vide/conducteur parfait en présence de charges surfaciques ρ_s et de courants surfaciques \vec{j}_s . On note \vec{n} le vecteur normal sortant du conducteur (*Figure 2*).

16. En utilisant les notations de la *Figure 2*, donner, sans démonstration, les quatre relations de passage concernant les composantes tangentielle et normale des champs \vec{E} et \vec{B} .

17. Comment se simplifient ces relations compte tenu des valeurs de \vec{E} et \vec{B} dans le conducteur parfait.

18. Les valeurs de ρ_s et \vec{j}_s étant quelconques, quelles sont en définitive les seules conditions aux limites imposées par un conducteur parfait ?

II. Structure de l'onde électromagnétique à l'intérieur d'un guide d'ondes rectangulaire

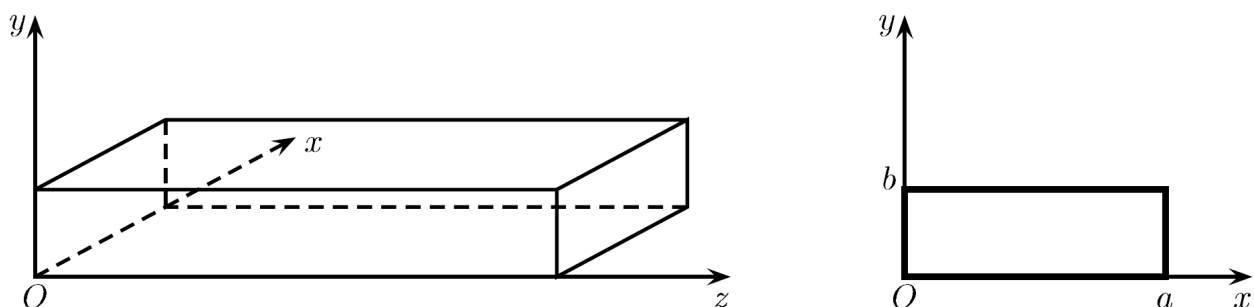


Figure 3 : Guide d'ondes rectangulaire.

Le guide d'ondes considéré est constitué de parois métalliques conductrices supposées parfaites. Il est rectiligne et présente une section génératrice rectangulaire de largeur a suivant l'axe Ox et

de hauteur b suivant l'axe Oy . On supposera que $a > b$. L'intérieur du guide est rempli d'air dont les propriétés électromagnétiques seront assimilées à celles du vide.

On peut montrer, et on l'admettra dans le cadre de ce problème, que le guide d'ondes rectangulaire ne peut pas propager des ondes électromagnétiques transverses (champs électrique et magnétique simultanément orthogonaux à la direction de propagation). On étudie ici une onde transverse électrique TE .

On cherche à décrire la propagation sans atténuation dans le guide par une onde transverse électrique ou onde TE: le champ électrique est transverse (orthogonal à la direction de propagation Oz) alors que le champ magnétique ne l'est pas. Cherchant à décrire un phénomène harmonique de propagation suivant Oz , on écrit les champs en représentation complexe selon:

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(x, y) \exp i(\omega t - k_g z) \quad \text{et}$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0(x, y) \exp i(\omega t - k_g z)$$

avec

$$\vec{E}_0(x, y) = E_{0x}(x, y) \vec{u}_x + E_{0y}(x, y) \vec{u}_y \quad \text{et}$$

$$\vec{B}_0(x, y) = B_{0x}(x, y) \vec{u}_x + B_{0y}(x, y) \vec{u}_y + B_{0z}(x, y) \vec{u}_z$$

19. A partir des équations de MAXWELL, établir l'équation de propagation pour le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $B_{0z}(x, y)$.

20. Cette équation peut être résolue par la méthode de séparation des variables. Vérifier que $B_{0z}(x, y) = (A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x)(B_1 \cos \beta y + B_2 \sin \beta y)$ peut convenir comme solution de cette équation à condition que k_g , ω , α et β vérifient une relation que l'on déterminera. (α et β sont deux constantes que l'on déterminera dans les questions suivantes à l'aide des conditions aux limites imposées par le guide d'ondes).

21. A l'aide de projections appropriées des équations de MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPERE, exprimer E_{0x} en fonction de $\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}$, k_g , ω et c_0 .

22. Exprimer de même E_{0y} en fonction de $\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}$, k_g , ω et c_0 .

23. En déduire alors les expressions de E_{0x} et E_{0y} en fonction de x et y .

24. Écrire les conditions aux limites imposées par le guide d'ondes à E_{0y} en $x=0$ et $x=a$ ainsi que celles imposées à E_{0x} en $y=0$ et $y=b$ et montrer que, m et n étant deux nombres entiers $B_{0z}(x, y) = A_1 B_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$.

25. En déduire la structure du champ électrique pour le mode TE_{mn} :

$$E_{0x, mn} = A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\underline{E}_{0y, mn} = \underline{B}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$\underline{E}_{0z, mn} = 0$$

\underline{A}_{mn} et \underline{B}_{mn} étant deux constantes complexes que l'on exprimera.

On peut montrer, et on l'admettra dans le cadre de cette étude, que pour le mode TE_{mn} , les entiers m et n ne peuvent être tous les deux nuls à la fois.

26. Montrer que, pour le mode TE_{mn} , le module $k_{g, mn}$ du vecteur d'onde $\vec{k}_g = k_g \vec{u}_z$ dans le guide est donné par $k_{g, mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$

27. Montrer que le guide d'ondes se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure ν_c pour les ondes électromagnétiques. Donner l'expression de la fréquence de coupure $\nu_{c, mn}$ pour le mode TE_{mn} . Que se passe-t-il si la fréquence de travail ν est inférieure à la fréquence de coupure $\nu_{c, mn}$.

28. Exprimer la longueur d'onde dans le guide $\lambda_{g, mn}$ en fonction de m , n , a , b et de la longueur d'onde λ dans le vide.

Réponses

1) équation de Maxwell - Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{avec } \vec{j} = \sigma \vec{E})$$

Si on est en sinusoïdal (on travaille en $\exp(i\omega t)$)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 i \omega \vec{E}$$

Pour un "bon conducteur", on pourra négliger la densité volumique de courant de déplacement ($\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) par rapport à la densité volumique de courant de conduction ($\sigma \vec{E}$)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\sigma + i\omega \epsilon_0) \vec{E}$$

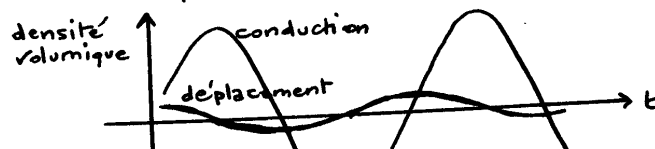
si

$$\omega \epsilon_0 \ll \sigma \quad (\text{avec } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1)$$

$$\omega \ll \frac{\sigma \mu_0 c^2}{2\pi}$$

remarque

On donne l'impression de négliger un imaginaire $i\omega \epsilon_0$ par rapport à un réel σ .
En fait $\sigma \vec{E}$ et $i\omega \epsilon_0 \vec{E}$ correspondent à deux sinusoïdes déphasées de $\frac{\pi}{2}$.
On néglige la sinusoïde d'amplitude beaucoup plus petite.



A.N.

$$\begin{aligned} \omega &= 3,67 \cdot 10^9 \text{ Hz} \\ \frac{\sigma \mu_0 c^2}{2\pi} &= \frac{5,9 \cdot 10^7 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{2\pi} \\ &= 1,06 \cdot 10^{18} \text{ Hz} \end{aligned}$$

L'approximation est donc vérifiée

2) Donc

$$\begin{array}{l} \text{M.A.} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} \end{array}$$

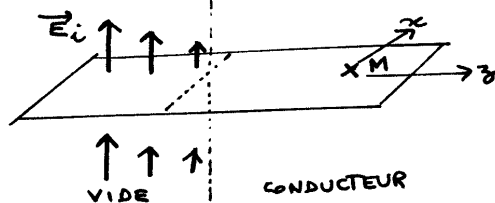
3) L'onde incidente a la pulsation ω

Les charges du métal, en régime ondulatoire forcé, vibrent à la pulsation ω aussi.

Ces dipôles oscillants émettent un rayonnement de même pulsation ω .

L'onde transmise (onde incidente + onde émise par les dipôles) aura donc la pulsation $\omega' = \omega$

4) Un plan $M \times z$ est un plan d'antisymétrie du problème



Donc en M : $\vec{E}_t \perp$ plan d'antisymétrie.

$$\vec{E}_t \text{ selon } \vec{u}_y$$

Le problème est invariant selon x et y

$$\vec{E}_t = \vec{E}_t(z, t)$$

finalement :

$$\vec{E}_t = E_t(z) \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

5) Les équations de Maxwell dans le "bon conducteur" sont donc :

$$\text{M.G.} \quad \text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{M. flux} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{M.F.} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$$

$$\text{M.A.} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

(cf 2))

Donc
$$\text{rot rot } \vec{E} = -i\omega \underbrace{\text{rot } \vec{B}}_{\mu_0 \sigma \vec{E}}$$

on utilise

$$\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \underbrace{\text{rot rot } \vec{E}}_{\text{nul}}$$

$$\Delta \vec{E}_t(M,t) = i\omega \mu_0 \sigma \vec{E}_t(M,t)$$

et en simplifiant par $\exp(i\omega t)$:

$$\Delta \vec{E}_t(M) = i\omega \mu_0 \sigma \vec{E}_t(M)$$

6) En projetant selon \vec{u}_y et en remarquant que $E_t(M)$ ne dépend que de z

$$\frac{d^2 E_t(z)}{dz^2} = \underbrace{i\omega \mu_0 \sigma}_{-k_t^2} E_t(z)$$

$$k_t^2 = -i\omega \mu_0 \sigma$$

L'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 E_t(z)}{dz^2} + k_t^2 E_t(z) = 0$$

3)

remarque :

deux façons alors de rechercher la solution
 → on cherche, comme on mettra, une solution de la forme $E_t(z)$ en $\exp(rz)$
 d'où l'équation caractéristique habituelle

$$r^2 + k_t^2 = 0$$

$$r^2 = -k_t^2$$

on choisit $r = -i k_{t1}$ ou $r = -i k_{t2}$

$$E_t(z) = A \exp(-i k_{t1} z) + B \exp(-i k_{t2} z)$$

→ on cherche, comme dans le cours sur les ondes, une solution de la forme $\underline{E}_t(z)$ en $\exp(-ikz)$ d'où l'équation :

$$(-ik)^2 + \underline{k}_t^2 = 0$$

$$k^2 = \underline{k}_t^2$$

donc $k = \underline{k}_{t1}$ ou $k = \underline{k}_{t2}$ (les deux racines)

et finalement

$$\underline{E}_t(z) = \underline{A} \exp(-i\underline{k}_{t1}z) + \underline{B} \exp(-i\underline{k}_{t2}z)$$

$$\begin{aligned} \underline{k}_t^2 &= -i\omega\mu_0\sigma \\ &= \omega\mu_0\sigma \exp(-i\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \underline{k}_t &= \pm\sqrt{\omega\mu_0\sigma} \exp(-i\frac{\pi}{4}) \\ &= \pm\sqrt{\omega\mu_0\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{k}_t = \pm \underbrace{\frac{(1-i)}{\delta}}_{\text{notation algébrique}} = \pm \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp(-i\frac{\pi}{4})}_{\text{notation exponentielle}}$$

avec

notation algébrique

notation exponentielle

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$$

En posant : $\underline{k}_{t1} = \frac{1-i}{\delta}$

$$\underline{k}_{t2} = -\frac{(1-i)}{\delta}$$

on aurait (cf remarque)

$$\begin{aligned} \underline{E}_t &= \underline{A} \exp(-i\underline{k}_{t1}z) + \underline{B} \exp(-i\underline{k}_{t2}z) \\ &= \underline{A} \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(-i\frac{z}{\delta}) + \underline{B} \exp(\frac{z}{\delta}) \exp(+i\frac{z}{\delta}) \end{aligned}$$

Ici z dans le conducteur varie entre 0 et l'infini.
Le facteur $\exp(\frac{z}{\delta})$ dans le terme utilisant k_2 tend vers l'infini ... ce qui n'a pas de sens physique. Le champ ne peut tendre vers l'infini avec z .

La solution à garder pour $\exp(-ik_1 z)$ est donc k_1

$$\underline{k}_1 = \frac{1-i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp(-i\frac{\pi}{4})$$

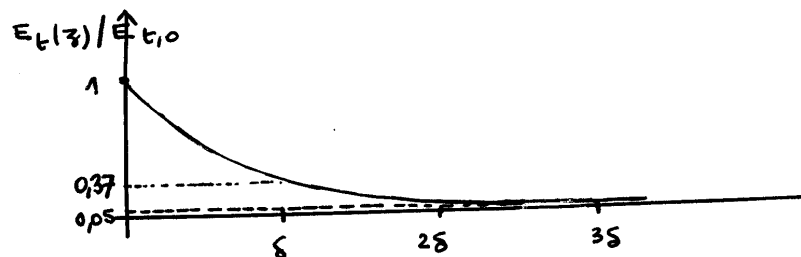
8)

$$\underline{E}_t(z) = A \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(-i\frac{z}{\delta})$$

$$\underline{E}_t(z) = E_{t,0} \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(-i(\frac{z}{\delta} + \varphi))$$

et: $\vec{E}_t(M,t) = E_{t,0} \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \varphi)) \vec{u}_y$

9)



→ Après une longueur δ , il reste 37% de E_t
 3δ 5%
 5δ moins de 1%.

Le champ E pénètre dans le bon conducteur sous une distance de quelques δ (= épaisseur de peau)

→ δ est une longueur (cf $[k] = \frac{1}{\delta}$)

remarque

Vérification en utilisant :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

$$[\delta]^2 = [\mu_0]^{-1} [\sigma]^{-1} [\omega]^{-1}$$

Puis par exemple :

- solénoïde $B = \mu_0 j_s$ donc $[\mu_0]^{-1} = [B]^{-1} [j_s]$

- loi d'ohm $j = \sigma E$ donc $[\sigma]^{-1} = [E] [j]^{-1}$

$$[\mu_0]^{-1} [\sigma]^{-1} = \frac{[E]}{[B]} \frac{[j_s]}{[j]}$$

$$= \frac{[\text{vitesse}]}{[\text{longueur}]} \frac{[\text{longueur}]}{[\text{longueur}]}$$

$$= L T^{-1} L$$

$$[\delta]^2 = L^2 T^{-1} T$$

$$[\delta] = L$$

10) A.N.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,9 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 9,67 \cdot 10^9}}$$

$$\delta = 0,67 \mu\text{m}$$

Épaisseur très petite ... en gros, à cette fréquence, le champ n'existe que sous une épaisseur de l'ordre 2 ou 3 μm .

11) On a trouvé :

$$\vec{E}_t(z, t) = E_{t,0} \exp i(\omega t - k_{t1} z - \varphi) \vec{u}_y \quad \text{avec } \vec{k}_{t1} = k_{t1} \vec{u}_z$$

donc :

$$\text{rot } \vec{E}_t = - \frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}$$

$$= -i\omega \vec{B}_t$$

$$-i \vec{k}_{t1} \wedge \vec{E}_t = -i\omega \vec{B}_t$$

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_{t1} \wedge \vec{E}_t}{\omega}$$

$$= - \frac{k_{t1}}{\omega} E_t \vec{u}_z$$

$$= - \frac{k_{t1}}{\omega} E_{t,0} \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp i(\omega t - \frac{z}{\delta} - \varphi) \vec{u}_z$$

$$16) \quad \vec{E}_2(M,t) - \vec{E}_1(M,t) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\begin{array}{l} E_2 \text{ tangentiel} - E_1 \text{ tangentiel} = 0 \\ \vec{n} \vec{E}_2 - \vec{n} \vec{E}_1 = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{array}$$

$$\vec{B}_2(M,t) - \vec{B}_1(M,t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\begin{array}{l} \vec{n} \vec{B}_2 - \vec{n} \vec{B}_1 = 0 \\ \vec{n} \wedge \vec{B}_2 - \vec{n} \wedge \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \end{array}$$

(B_2 tangentiel - B_1 tangentiel = $\mu_0 \vec{j}_s$
mais ici les directions ne sont pas précisées)

17) Les champs correspondant aux ondes sont nuls dans le conducteur parfait.

$$\begin{array}{l} \vec{E}_{\text{vide}}(M,t) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} \\ \vec{B}_{\text{vide}}(M,t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{\text{ext}} \end{array}$$

18) finalement pour un conducteur parfait, aux limites :

$$\begin{array}{l} E \text{ tangentiel} = 0 \\ B \text{ normal} = 0 \end{array}$$

19) Dans le vide :

$$\begin{array}{l} \text{M.G.} \quad \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{M. flux.} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{M.A.} \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} i\omega \vec{E} \\ \text{M.F.} \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{B} &= \frac{1}{c^2} i\omega \text{rot } \vec{E} \\ -\Delta \vec{B} + \text{grad div } \vec{B} &= -\frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{B} \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} \end{aligned}$$

équation de propagation

$$\Delta \vec{B}(M,t) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}(M,t) = \vec{0}$$

On projette selon z

$$\Delta \underline{B}_z + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{B}_z = 0$$

$$\text{avec } \underline{B}_z = \underline{B}_{0z}(x, y) \exp i(\omega t - k_y z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\underline{B}_z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\underline{B}_z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\underline{B}_z) + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{B}_z = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\underline{B}_z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\underline{B}_z) + (-ik_y) \underline{B}_z + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{B}_z = 0$$

et en simplifiant par $\exp i(\omega t - k_y z)$, on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{B}_{0z}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{B}_{0z}(x, y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) \underline{B}_{0z}(x, y) = 0$$

2) En reportant la solution indiquée :

$$-\alpha^2 \underline{B}_{0z} - \beta^2 \underline{B}_{0z} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) \underline{B}_{0z} = 0$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \alpha^2 + \beta^2 + k_y^2$$

21)

Remarque :

J'écris les équations de MF et MA en projection

$$\text{M.F.} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \underline{E} = -i\omega \underline{B}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ -ik_y & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$$

après simplification par $\exp i(\omega t - k_y z)$

$$\text{MF selon } x \quad ik_y E_{0y} = -i\omega B_{0x}$$

$$\text{MF selon } y \quad -ik_y E_{0x} = -i\omega B_{0y}$$

$$\text{MF selon } z \quad \frac{\partial}{\partial x} E_{0y} - \frac{\partial}{\partial y} E_{0x} = -i\omega B_{0z}$$

$$\text{M.A.} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \underline{B} = \frac{1}{c^2} i\omega \underline{E}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & B_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & B_y \\ -ik_y & B_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

après simplification par $\exp i(\omega t - k_y z)$

MA selon x	$\frac{\partial}{\partial y} B_{0z} + i k_y B_{0y} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0x}$
MA selon y	$-i k_y B_{0x} - \frac{\partial}{\partial x} B_{0z} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0y}$
MA selon z	$\frac{\partial}{\partial x} B_{0y} - \frac{\partial}{\partial y} B_{0x} = 0$

avec MA selon x : $\frac{\partial}{\partial y} B_{0z} + i k_y B_{0y} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0x}$

avec MF selon y : $B_{0y} = \frac{k_y}{\omega} E_{0x}$

finalement :

$$E_{0x} = \frac{-i\omega \frac{\partial}{\partial y} B_{0z}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2\right)}$$

22) avec MA selon y : $-i k_y B_{0x} - \frac{\partial}{\partial x} B_{0z} = \frac{i\omega}{c^2} E_{0y}$

avec MF selon x : $B_{0x} = -\frac{k_y}{\omega} E_{0y}$

finalement :

$$E_{0y} = \frac{i\omega \frac{\partial}{\partial x} B_{0z}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2\right)}$$

23)

$$B_{0z} = (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$$

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y} = \beta (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (-\underline{B}_1 \sin \beta y + \underline{B}_2 \cos \beta y)$$

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = \alpha (-\underline{A}_1 \sin \alpha x + \underline{A}_2 \cos \alpha x) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$$

$E_{0x} = \frac{-i\omega}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2} \beta (\underline{A}_1 \cos \alpha x + \underline{A}_2 \sin \alpha x) (-\underline{B}_1 \sin \beta y + \underline{B}_2 \cos \beta y)$
$E_{0y} = \frac{i\omega}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2} \alpha (-\underline{A}_1 \sin \alpha x + \underline{A}_2 \cos \alpha x) (\underline{B}_1 \cos \beta y + \underline{B}_2 \sin \beta y)$

24) → En $x=0$ et $x=a$, \underline{E}_{0y} (champ tangentiel aux 2 parois) doit être nul.

$$x=0 \rightarrow -\underbrace{A_1 \sin(\alpha x)}_{\text{nul}} + \underbrace{A_2 \cos(\alpha x)}_1 = 0$$

$$A_2 = 0$$

$$x=a \rightarrow -\underbrace{A_1 \sin(\alpha x)}_{\text{nul}} = 0$$

$$\alpha a = m\pi$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}$$

(m: entier)

→ En $y=0$ et $y=b$, \underline{E}_{0x} (champ tangentiel aux 2 parois) doit être nul.

$$y=0 \rightarrow -\underbrace{B_1 \sin(\beta y)}_{\text{nul}} + \underbrace{B_2 \cos(\beta y)}_1 = 0$$

$$B_2 = 0$$

$$y=b \rightarrow -\underbrace{B_1 \sin(\beta y)}_{\text{nul}} = 0$$

$$\beta b = n\pi$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b}$$

(n: entier)

Finalement, en revenant à \underline{B}_{0z}

$$\underline{B}_{0z}(x,y) = (A_1 \cos \alpha x + \underbrace{A_2 \sin \alpha x}_{\text{nul}}) (\underbrace{B_1 \cos \beta y}_{\text{nul}} + B_2 \sin \beta y)$$

$$\underline{B}_{0z}_{mn}(x,y) = A_1 \cos \frac{m\pi x}{a} B_1 \cos \frac{n\pi y}{b}$$

25)

$$\underline{E}_{0x}_{mn} = \frac{-i\omega}{c^2 - k^2} \frac{n\pi}{b} A_1 \cos \frac{m\pi x}{a} x - B_1 \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\underline{E}_{0x}_{mn} = \underbrace{\frac{i\omega A_1 B_1}{m^2 \pi^2 + n^2 \pi^2} \frac{n\pi}{b}}_{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Δ_{mn}

$$\underline{E}_{0y,mn} = \frac{i\omega}{\omega^2 - k_g^2} \frac{m\pi}{a} \times -A_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \times B_1 \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$\underline{E}_{0y,mn} = \underbrace{\frac{-i\omega A_1 B_1 \frac{m\pi}{a}}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}}_{B_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

26) En 2a) on a obtenu l'équation de dispersion

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} = \alpha^2 + \beta^2 + k_g^2$$

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} + k_g^2$$

$$k_{g,mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

27) Il y a propagation si la quantité sous radical est positive.

soit $\omega^2 > c_0^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$

ou

$$\omega > \underbrace{\frac{c_0}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}_{v_{c,mn}}$$

28) On pose

$$k_{g,mn} = \frac{2\pi}{\lambda_{g,mn}}$$

$$\lambda_{g,mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}}$$